Martin Kramer

Bruchrechnen als Abenteuer

Mit Ketten und Zahnrädern Brüche begreifen

Erleben wird zur Grundlage des Unterrichtens

Leseprobe

Klett

Kallmeyer

MATHE.FORSCHER

Entdecke Mathematik in deiner Welt

Martin Kramer, geb. 1973, Vater, Leiter der Abteilung für Didaktik der Mathematik an der Universität Freiburg (2012–2018), Theaterpädagoge (BuT), Zusatzausbildung Kommunikationspsychologie (Schulz von Thun Institut), Robert-Boyle-Preis 2015 (MNU), 2003–2012 Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik, Initiator und Vorstand der Lernzukunft e.V., Beirat Mathe.Forscher, Zusammenarbeit mit den Kultusministerien Baden-Württemberg und Hessen, mit SINUS, Fibonacci und DELTAplus, mit verschiedenen Kulturschulen Hessen, mit dem Schultheater-Studio Frankfurt u. a.
Zahlreiche Publikationen und Lehrerfortbildungen zu handlungs- und erlebnisorientierter Didaktik, systemischem Denken und Handeln und unterrichtlicher Kommunikation. – Weitere Informationen unter www.unterricht-als-abenteuer.de.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Impressum

Martin Kramer
Bruchrechnen als Abenteuer
Mit Ketten und Zahnrädern Brüche begreifen

Redaktion: Gesine Jörg, Tiefenbronn
Fotos: Martin Kramer, Tübingen
Realisation: Bernd Burkart, Weinstadt-Baach
Druck: Offset Printing House KOPA, Vilnius
Printed in EU

ISBN: 978-3-7727-1108-4

Inhalt

Geleitworte 10

Vorwort 12

Grundlegendes zur Didaktik 14

Hinweise zur Buchbenutzung 18

Dank 21

Teil I: Didaktische Einführung 23

1 Bruchrechnen sichtbar machen 24

1.1 Warum Bruchrechnen schwierig ist 24

1.2 Flächen- und Operatorkonzept 30

1.3 Lernen in vier Dimensionen 31

1.4 Ein komplettes Abbild der Bruchrechnung – und noch mehr! 34

1.5 Die verschiedenen Zahlenbereiche und ihre Modellierung 40

1.6 Einsatzmöglichkeiten: Unterstufe und höhere Klassen . . 45

2 Lehr- und Lernverständnis 49

2.1 Der Lehrer als Spielleiter 49

2.2 Kommunikation in handlungsorientiertem Unterricht . . 52

2.3 Didaktik des Materials 55

2.4 Kompetenzorientierung 61

3 Logistik des Materials 63

3.1 Anzahl und Bestellung der Kästen 64

3.2 Vollständigkeit und Ordnung 64

3.3 Verantwortung personifizieren: Materialwart und Zeitmanager. 66

3.4 Häufige handwerkliche Schwierigkeiten 70

3.5 Exkurs I: Fermiaufgabe und Kettenbau 73

3.6 Exkurs II: Kombinatorik des Materials 76

3.7 Der Baukasten als Fermi-Problem 79

3.8 Bauanleitung für das „erste Produkt“ (vgl. Kapitel 5) . . . 85

Teil II: Lehrgang zur Bruchrechnung 87

4 Grundlegendes zu Reihenfolge und Inhalt 88
4.1 Ein Gang durch den Wald 88
4.2 Bruchrechnen als Abenteuer 90

5 Ein erstes Produkt 92
5.1 Ein Test ohne Bewertung 93
5.2 Erste Begegnung mit einem Getriebe 94
5.3 Das Material als Datengenerator 95
5.4 Standpunkte einnehmen – Schüler diskutieren 97
5.5 Die Auflösung: das Getriebe als Modell für 2 · 4 103

6 Erste Schülerkonstruktionen 105
6.1 Eine erste Konstruktion: 2 · 3 105
6.2 Eigene Produkte erfinden und lösen 108

7 Brüche am Fahrrad – der Bruch als Verhältnis 115
7.1 Mein kleinster und größter Gang am Fahrrad 115
7.2 Vertiefende Übung: Brüche auf dem Zahlenstrahl . . . 123

8 Erweitern und Kürzen, Bruch und Bruchzahl, Brüche vergleichen 126
8.1 Bruch und Bruchzahl 126
8.2 Kürzen und Erweitern 129
8.3 Weitere Übungen zum Kürzen und Erweitern – ohne Ketten und Zahnräder 135
8.4 Brüche der Größe nach vergleichen 138

9 Exponentielles Wachstum, Potenzen und Potenzgesetze 141
9.1 Teamtraining: Exponentielles Wachstum 141
9.2 Exkurs für höhere Klassen: Exponentielles Wachstum und Kettenlinie 154
9.3 Potenzen: die Grenzen der Belastbarkeit. 158
9.4 „hoch null“ und negative Hochzahlen 160
9.5 Potenzgesetze 162

10 Division . . . 164
10.1 Teilen durch natürliche Zahlen . . . 164
10.2 Teilen durch Brüche . . . 168

11 Multiplizieren von Brüchen . . . 169
11.1 Doppelgetriebe und Gleichungen . . . 169
11.2 Ein Modell für die Gleichung $2 : 3 = \frac{2}{3}$ bzw. $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . . . 171
11.3 Die Multiplikationsregel: „Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ . . . 174
11.4 Mathematik begegnet Realität – Multiplikationsregel sagt Vertauschbarkeit der Zahnräder voraus . . . 182
11.5 Währungssysteme, Primzahlräder und ein Ausblick auf irrationale Zahlen . . . 192

12 Negative Brüche . . . 195
12.1 Minus mal Minus ergibt Plus . . . 195
12.2 Materielles Abfragen: eine vertiefende Übung . . . 202
12.3 Direkte Verzahnung – ein Rätsel . . . 208
12.4 Tieferes Verständnis: das Vorzeichen von Zahlen und Operatoren . . . 211

13 Addition von Brüchen . . . 214
13.1 Bruchzahlen der Größe nach vergleichen . . . 214
13.2 Teamtraining: pythagoreisches Komma . . . 216
13.3 Addition von Brüchen . . . 218

Teil III: Funktionen . . . 225

14 Lineare Funktionen . . . 226
14.1 Maschinen . . . 226
14.2 Bau einer Multiplikationsmaschine . . . 230
14.3 Proportionale Maschinen . . . 238
14.4 Allgemeine lineare Funktionen . . . 240
14.5 Funktionswert und Ableitung – Höhe und Steigung . . . 241
14.6 Umkehrfunktionen und Verkettung von Funktionen . . . 247
14.7 Proportionale und exponentielle Funktionen . . . 250

Literatur . . . 253

Vorwort

Günther Malle

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt." (Günther Malle[1])

Bruchrechnen zu lernen braucht Zeit. Natürlich kann man in wenigen Minuten Rechengesetze einführen, aber das hat nichts mit Mathematik zu tun. Um Bruchrechnen zu verstehen, müssen zuerst neue Modelle und Konzepte zum Verständnis aufgebaut werden. Für einen jungen Menschen ist es z. B. höchst erstaunlich, dass eine Zahl auch kleiner werden kann, wenn man sie mit einer anderen malnimmt. Das wundert nicht, da sein Konzept der Multiplikation auf Vervielfältigung beruht. In seinem Gehirn muss sich erst ein komplexeres Modell entwickeln, bevor er verstehen kann.
In „Bruchrechnen als Abenteuer" wird mit Hilfe von Zahnrädern, Übersetzungen und Getrieben ein handlungsorientierter Zugang aufgezeigt. Die Algebra erhält beim Bau eine konkrete Bedeutung. Theorie und Praxis werden unmittelbar miteinander verknüpft. Der haptische Umgang mit Zahnrädern, Übersetzungen und Getrieben ist eine äußerst effektive Art, Wissen entstehen zu lassen.

Kompetenzen

Bemerkenswert ist, dass der Umgang mit dem Material die heute so oft geforderten Kompetenzen in selbstverständlicher Weise schult. Es ist schlichtweg unmöglich, „Bruchrechnen als Abenteuer" zu unterrichten, ohne dabei Kommunikationsfähigkeit, Planungsfähigkeit, Problemlösefähigkeit, Selbstständigkeit, Verantwortungsfähigkeit etc. zu fördern – ob Sie als Lehrperson nun daran denken oder nicht.

Lehrer als Abenteurer

„Bruchrechnen als Abenteuer" leistet weit mehr, als „nur" Theorie und Praxis geschickt zu verbinden, Kompetenzen zu fördern oder nachhaltiges Verständnis zu ermöglichen. Aus einer systemisch-konstruktivistischen Sichtweise ist eine völlig andere Art des Unterrichtens beschrieben, diese stellt hohe Anforderungen an die Lehrkraft. Für gewöhnlich diktiert und taktet das Schulbuch den Unterricht. Der

1 Günther Malle: Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren, Heft 123, 2004, S. 4.

Lehrer ist dazu da, dass der vorgefertigte Stoff fremdbestimmt „durchgenommen“ wird. Das ist zwar einfach, aber auch eintönig und wirkungslos (für alle Beteiligten).
In „Bruchrechnen als Abenteuer“ ist der Umgang mit dem Material wegführend. Statt ein fremdbestimmtes und vorgefertigtes Programm zu erfüllen, geht es darum, eigene Wege zu entdecken. Der Lehrer ist hierbei viel stärker gefordert. Er ist Scout und Kompass im Wissensgebiet. Statt eines vorgefertigten Programms schaut *er,* was ansteht. Der Kapitän und nicht das Buch entscheidet, was im Unterricht passiert. Er gestaltet mit Blick auf seine Schüler die unterrichtliche Kommunikation. Hinter der Reihe „Mathematik als Abenteuer“ steckt ein Menschenbild, welches den Schüler als selbst erschaffendes und nicht als ein zu beschulendes Wesen annimmt.
Dem Lehrer wird eine grundlegend andere Rolle zuteil: Er wechselt vom „Beschuler“ zum Strukturgeber, vom „Belehrenden“ zum Gestalter von Lernumgebungen. Sicherlich entdecken Sie und Ihre Schüler noch neue, weitere Aspekte der Bruchrechnung. Das wäre ganz und gar nicht verwunderlich. Das geschieht immer, wenn Unterricht lebendig wird.

vom „Beschuler“ zum Gestalter

Ich wünsche Ihnen und Ihren Schülern viel Freude mit „Bruchrechnen als Abenteuer“.

Martin Kramer

1.4 Ein komplettes Abbild der Bruchrechnung – und noch mehr!

Als ich anfing, mich mit der didaktischen Nutzung von Fischertechnik zu beschäftigen, war ich fasziniert, dass sich scheinbar *alles* aus der Bruchrechnung auf Ketten und Zahnräder übertragen ließ. Doch der Zauber der Faszination verblasste mit einem abstrakteren Blickwinkel, als ich nämlich bemerkte, dass sich die Übersetzungen homomorph auf die multiplikative Gruppe der Brüche abbilden lassen. Die Multiplikation entspricht dabei der Hintereinanderschaltung zweier Übersetzungen. Es handelt sich um dieselbe Struktur.

Homomorphismus

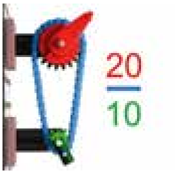
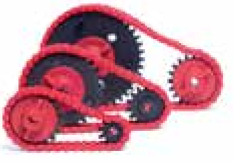
Das ist didaktisch und pädagogisch interessant: Das Arbeiten mit Ketten und Zahnrädern ist weder schwieriger noch leichter als der Umgang mit formalen Brüchen. Der wesentliche Vorteil ist „nur“: Sie können mittels Getrieben die Bruchrechnung und deren Probleme sichtbar machen.

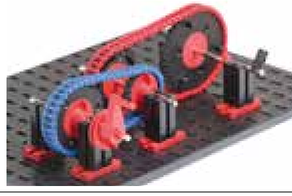
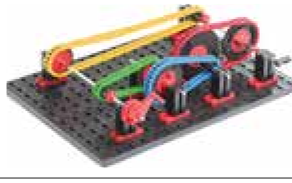
Probleme sichtbar machen

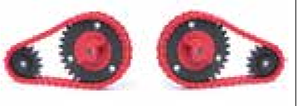
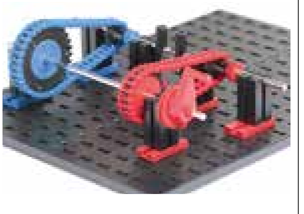
Gesamtübersicht über theoretische und praktische „Begriffe“

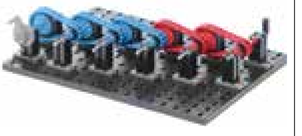
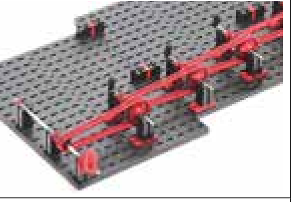
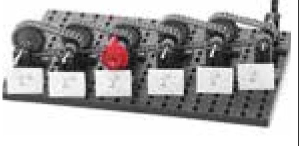
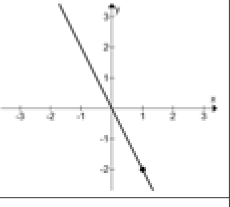
Eine Übersicht über das Zusammenspiel[15] von Theorie und Praxis zeigt folgende Tabelle. Weiter dient sie zum Nachschlagen während eigener Bauunternehmen. Die Begriffe „Bruch“, „Bruchzahl“, „Übersetzung“, „Getriebe“ etc. werden in der Lehrgangsskizze in dieser Definition verwendet.

15 Die Formulierung „Zusammen*spiel*“ ist bewusst gewählt: Das Spiel ist die effektivste Form, um Wissenskonstruktion zu ermöglichen. Die dargestellte Didaktik basiert daher auf einem spielerischen Lernverständnis.

symbolisch		**enaktiv**	
positiver Bruch	$\frac{20}{10}$	Übersetzung mit Kette	
negativer Bruch	$-\frac{20}{10}$	Übersetzung mit direkter Verzahnung	
Zähler	Bei einem Bruch die Zahl über dem Bruchstrich	Anzahl der Zähne am vorderen, mit der Kurbel angetriebenen Zahnrad	
Nenner	Zahl unter dem Bruchstrich	Anzahl der Zähne am hinteren, von der Kette angetriebenen Zahnrad	
Bruchzahl		Übersetzungsverhältnis	
Kürzen und Erweitern	$\frac{20}{10} = \frac{30}{15} = \frac{40}{20}$	Verschiedene Übersetzungen ergeben dasselbe Übersetzungsverhältnis	
Äquivalenzklasse	$\frac{40}{20} = \frac{30}{15} = \frac{20}{10} = \ldots$	alle Übersetzungen mit gleichem Übersetzungsverhältnis	
irrationale Zahlen		Aus Ketten und Zahnrädern werden Walzen und Bänder.	

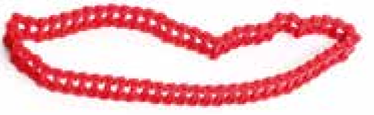
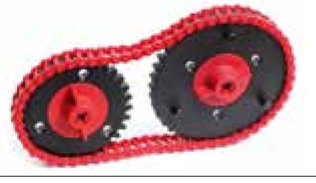
Multiplikation und Division			
multiplikative Verknüpfung bzw. der Malpunkt	$\cdot$	Achse	
einfache Multiplikation	$\frac{30}{20} \cdot \frac{30}{40}$	Hintereinanderausführung von zwei Übersetzungen	
Term bzw. Produkt		Getriebe, d. h. Hintereinanderausführung einer oder mehrerer Übersetzungen	
Berechnung eines Terms		Anzahl der Winkerumdrehungen (Umdrehungen der hintersten Achse) bei einer vollständigen Kurbeldrehung an der vordersten Achse	
Gleichung bzw. Gleichheit zweier Terme	$\frac{20}{10} = \frac{10}{20} \cdot \frac{30}{10} \cdot \frac{40}{30}$	Zwei Getriebe, die mit derselben Achse starten, können auch die hinterste Achse gemeinsam benutzen.	
Kürzen in Produkten	$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{1}{3}$ $= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}$	Die 20er-Räder dürfen in dem Getriebe rechts „herausgekürzt“ werden.	
Kommutativität der Multiplikation	$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{40}{15} \cdot \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{40}{15} \cdot \frac{4}{2}$	Die Reihenfolge der einzelnen Übersetzungen spielt für die Gesamtübersetzung keine Rolle.	

Minus mal Minus ergibt Plus	$\left(\frac{-20}{10}\right) \cdot \left(\frac{-40}{10}\right) = 8$	Die Drehrichtung ändert sich zweimal, die hinterste Achse hat also den gleichen (positiven) Drehsinn wie die Kurbel.	
Kehrbruch	Zähler und Nenner werden vertauscht.	Innerhalb einer Übersetzung werden die Zahnräder vertauscht.	
Division von Brüchen	Durch einen Bruch wird geteilt, indem man mit dem Kehrbruch multipliziert.	Teilen erfolgt durch Anwendung der Umkehrübersetzung.	
Größenvergleich und Addition			
Brüche der Größe nach vergleichen	$\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ bzw. $\frac{4}{9} < \frac{3}{8}$	Mittels zweier Winker können die Übersetzungsverhältnisse ihrer Größe nach verglichen werden.	
Addieren von Brüchen	Bei gleichem Nenner (Hauptnenner) können die Zähler (als ganze Zahlen) addiert werden.	Der Hauptnenner ergibt sich als kleinste Anzahl an Kurbeldrehungen, bei der die Winker erneut senkrecht nach oben zeigen.	

Potenzrechnung, exponentielles Wachstum und Funktionen			
Potenzgesetze	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$		
exponentielle Funktionen und exponentielles Wachstum	$f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	Pro Achse halbiert sich die Anzahl der Umdrehungen.	
exponentieller Aufbau des Zahlensystems	Zweiersystem als Beispiel: Einer, Zweier, Vierer, Achter …	Hintereinanderschaltung von Getrieben entspricht exponentiellem Wachstum	
negativer Exponent und die Null im Exponent	$2^0 = 1$ $2^{-2} = \frac{1}{4}$	Im Aufbau stehen rechts positive Potenzen, links negative.	
Lineare Funktionen		Die Maschine „funktioniert“ nach dem Schaubild	
Umkehrfunktionen		Vertauschung von Kurbel und Winker bzw. Vertauschung der Reihenfolge des Aufbaus	

Anatomie eines Bruch-Operators

Dem Operatorgedanken kommt in diesem Buch eine besonders wichtige Rolle zu. Exemplarisch ist im Folgenden der Aufbau schrittweise gezeigt:

die ganze Zahl $30 \in \mathbb{Z}$	
die ganze Zahl $40 \in \mathbb{Z}$	
Die Beziehung beider Zahlen ermöglicht den Bruch. Mit dieser „Beziehung“ wird ein neuer Zahlenbereich ermöglicht. Anders formuliert: Der Quotientenkörper $\mathbb{Q}$ wird konstruiert.	
der Bruch $\frac{30}{40}$	
die multiplikative Verknüpfung bzw. der Malpunkt	
der Operator „$\cdot\frac{30}{40}$“	
der Operator „$\frac{30}{40}\cdot$“	

5.2 Erste Begegnung mit einem Getriebe

Der Lehrer zeigt das fertig aufgebaute Getriebe[47] seinen Schülern (vgl. das Foto).

Die Frage lautet: *„Wie oft dreht sich das letzte Zahnrad (auf dem Foto das rechteste), wenn man die Kurbel links einmal dreht?“*
Der Lehrer dreht einmal an der Kurbel: Das hintere Zahnrad bzw. der aufgesteckte schwarze Winker auf der hinteren Achse rotiert zu schnell für das Auge. Daher soll die Anzahl der Umdrehungen geschätzt werden. Wer sich festgelegt hat, verschränkt zum Zeichen die Arme. Auf ein Signal des Lehrers wird der eigene Schätzwert mit den Fingern schweigend angezeigt: Ein Finger steht für eine Umdrehung der hinteren Achse bzw. des Winkers. Der Lehrer fordert die Schüler auf, sich umzusehen, wer welchen Wert anzeigt. Während der ganzen Übung wird nicht gesprochen.

Didaktisch-methodischer Hintergrund
Mit dem Schätzen wird der Schüler ein bisschen „in die Pflicht“ genommen. Er muss sich festlegen, er macht eine Aussage, die auch von seinen Mitschülern wahrgenommen wird. Durch diese kleine Intervention

47 Die Bauanleitung hierzu finden Sie im Abschnitt 3.8 oder als kostenfreie pdf im Downloadbereich von www.unterricht-als-abenteuer.de. Wer noch nie mit Fischertechnik Getriebe gebaut hat, dem sei fürs erste Aufbauen das Kapitel 3 „Logistik des Materials“ empfohlen, besonders 3.6 „Häufige handwerkliche Schwierigkeiten“ und in 3.2 der Unterabschnitt „Funktionsunfähige Teile“.

wird das Thema zu seiner eigenen Sache. Das ist die Grundlage für eine lebendige Diskussion.

5.3 Das Material als Datengenerator

Wie oft dreht sich nun die hintere Achse? Kann die Antwort ohne Experiment gefunden werden?

Datenkonstruktion

Die Schüler dürfen alle Daten über den Aufbau erfragen, die ihrer Meinung nach zur Berechnung der Umdrehungen erforderlich sind. Der Lehrer gibt stets Auskunft, ohne diese zu bewerten. Er lässt sich nicht anmerken, ob die Daten seiner Ansicht nach lösungsrelevant sind oder nicht. Die Frage nach der Länge der Metallachsen wird ebenso ernsthaft beantwortet wie die Frage nach der Anzahl der Zähne der einzelnen Räder. Bei mir fragten die Schüler beispielsweise nach den Längen der Ketten.

Didaktische Bemerkung: Was wird vorgegeben?
Es gibt drei verschiedene Möglichkeiten, Aufgaben zu stellen:

I) Puzzle
Der Lehrer gibt genau die Daten an, die (in seiner Wirklichkeit und nach seiner Vorstellung) zur Lösung betragen. Diese Form der Fragestellung findet man im schulischen Alltag weit verbreitet, auch

wenn sie nichts mit wirklichem Forschen gemein hat. Vielmehr gleicht sie einem Puzzlespiel: Alle Daten(teilchen) werden so zusammengefügt, dass es zu einer Lösung kommt.

II) Zu viele Daten
Alternativ kann der Schüler mehr Daten erhalten, als zur Lösung der Aufgabe notwendig sind. Welche müssen überhaupt verwendet werden, welche lenken eher ab? Um der Frage nach der Lösungsrelevanz (zumindest implizit) im Unterricht oder bei Tests gerecht zu werden, könnten beispielsweise in einem Test zu viele Informationen gegeben werden. Der Schüler muss dann geeignet auswählen, möchte er die Aufgabe lösen.
Aber auch diese Vorgehensweise deckt sich nicht mit der realen Forschungssituation: Der Lehrer hat vor-ausgewählt, er lässt dem Schüler einen bestimmten Datensatz zukommen, aus dem dieser wiederum auswählt. Man könnte dem Lehrer vorwerfen, dass er den Schüler bewusst in die Irre führt. Vielleicht sind Tests mit zu vielen Daten etwas näher an der Praxis, aber es haftet der Sache etwas Unnatürliches und vielleicht auch etwas Hinterhältiges an, wenn der Lehrer im Test *absichtlich* unwichtige Informationen angibt. Man kann verstehen, dass der ein oder andere Schüler hinterher das Gefühl hat, er wurde veräppelt bzw. absichtlich irregeleitet.

III) Forschen
Wer wirklich forscht, muss sich Daten selbst erschaffen[48] bzw. konstruieren. Er weiß dabei nicht, ob der Datensatz, den er erstellt, zur Lösung ausreicht oder nicht. Vielleicht fehlen sogar wichtige Informationen, vielleicht sind welche überflüssig. Jetzt trägt der Schüler die Verantwortung. Niemand ist da, der ihn in die Irre führt, höchstens das Material selbst. Aber das liegt dann in der Natur der Sache bzw. im Forschen an sich. Der Lehrer ist in diesem Fall weder hinterhältig noch leitet er in die Irre.

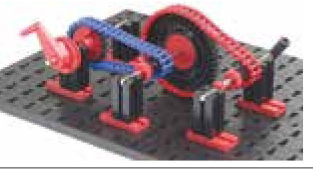
Schüler trägt Verantwortung

48 Die Natur selbst kennt keine Daten. Daten werden stets (z. B. durch Messungen) von einem Bewusstseinssystem erzeugt.

Kapitel 12

Negative Brüche

Dass Minus mal Minus Plus ergibt, wird sich in diesem Kapitel als einfache Selbstverständlichkeit erweisen: Verknüpft man zwei gegensinnige Übersetzungen, bleibt der Drehsinn zwischen dem ersten und letzten Rädchen erhalten.

	$\frac{20}{10} \cdot \frac{40}{10} = 8$
	$\left(\frac{-20}{10}\right) \cdot \left(\frac{-40}{10}\right) = 8$

12.1 Minus mal Minus ergibt Plus

Die folgende Lernumgebung besteht aus vier Phasen. Die erste Phase kann übergangen bzw. abgebrochen werden, wenn die Schüler mit der Addition negativer Zahlen noch bestens vertraut sind.

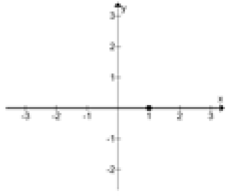
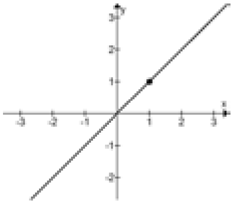
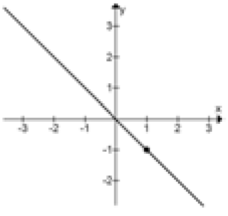
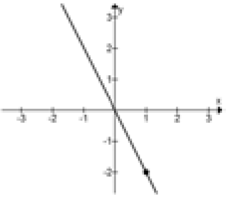
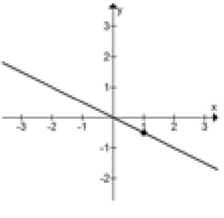
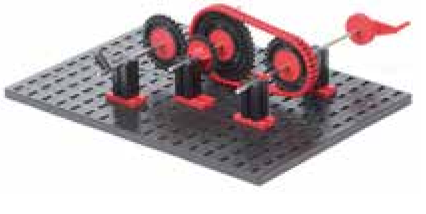
Addition negativer Zahlen

Phase I: Vorbereitung und Wiederholung
Eine einfache Aufgabe, die jeder sofort beantworten kann, wird an die Tafel geschrieben:

(1) $+2+3=?$

Wenn Vorzeichen ausgetauscht werden dürfen, gibt es drei weitere mögliche Aufgaben:

(2) $-2+3=?$
(3) $+2-3=?$
(4) $-2-3=?$

Nullfunktion $f(x) = 0$		
Identität $f(x) = x$		
Invertierer (Vorzeichenwechsler) $f(x) = -x$		
Allgemeine proportionale Funktion $f(x) = mx$ Das Beispiel zeigt $f(x) = -\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}x = -2x$. Die Kurbel ist um $+\frac{1}{8}$ gedreht, entsprechend der Winker um $f(x) = -\frac{2}{1}\left(+\frac{1}{8}\right) = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$.		
Umkehrfunktion[107] **zu** $\boldsymbol{f(x) = mx}$ $g(x) = \frac{1}{m}x = m^{-1}x$ (für m ≠ 0). Im Beispiel von oben ist die Umkehrfunktion: $g(x) = \frac{1}{-2}x = -\frac{1}{2}x$.		

108 Vgl. auch den Abschnitt 14.6 über Umkehrfunktionen.

Bruchrechnung begreifen, um zu begreifen! Mit Spiel und Spielfreude ein nachhaltiges und tiefes Verständnis von Mathematik aufbauen ist Gegenstand dieses Buches. Und das, obwohl Bruchrechnen in der Didaktik der Mathematik als eines der am schwierigsten zu unterrichtenden Themen gilt. In „Bruchrechnen als Abenteuer“ wird mit Hilfe von Zahnrädern, Übersetzungen und Getrieben die gesamte Bruchrechnung erlebbar. Der handlungsorientierte Zugang ist mehrfach praxiserprobt.

„Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden.“ (Günther Malle)


„Bruchrechnen als Abenteuer“ richtet sich an Lehrende aller Schulformen, an Referendare, Lehramtsstudierende sowie an Fortbildner und Fachleiter, die Anregungen für Lernumgebungen suchen und ihren Unterricht mit mehr Wertschätzung und Verantwortung auf Seiten der Schüler gestalten möchten. Überall, wo Bruchrechnen verstanden werden will.

Wichtiger Hinweis: Mit diesem Buch halten Sie nur das halbe „Abenteuer“ in den Händen. Zur unterrichtlichen Umsetzung benötigen Sie den Baukasten von Fischertechnik. Erst durch das eigene Kurbeln wird Bruchrechnung lebendig.

fischertechnik education